Gilbert Algorithm

秦睿哲

算法（Gilbert）

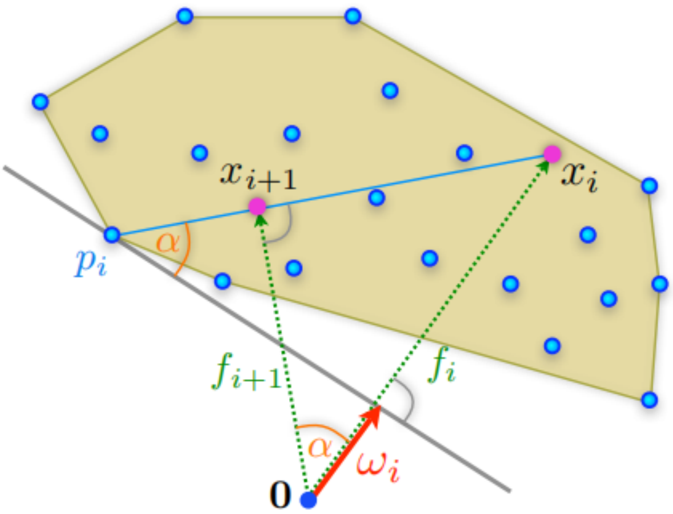
输入：原点 O，点集 Q

输出：Covex(Q)中离 O 最近的点

(1) 从 Q 中抽取离 O 最近的点 q_0，令 $x_1 = q_0$

(2) 迭代下列步骤

$q_i = \arg\min_{q_i \in Q} \{\langle q_i, x_i \rangle\}$，选择 x_{i+1} 是直线段 $[x_i, q_i]$ 上离 O 最近的点.



从图上可以看出来，x_{i+1} 是 x_i 和 q_i 的一个凸线性组合。

【算法证明过程】

首先定义一些常量。

ρ：最优的 Polytope 距离。

D：$\max\{\|q_i - q_j\| \mid q_i, q_j \in Q\}$

定义变量：

$f_i = \|x_i\|$

$h_i = f_i - \rho$

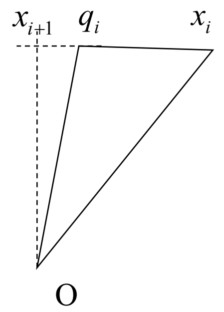
$g_i = f_i - \omega_i$

显然有

$\omega_i \le \rho \le f_i$

（1） x_{i+1}一定落在$\overline{x_i q_i}$上

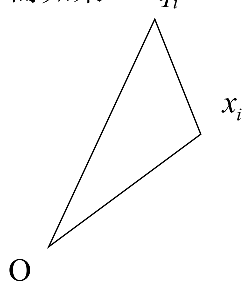
如果不成立，



那么有$\|x_i\| = f_i > \|q_i\|$ （$\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots$）

$\Rightarrow \|x_i\| > \|q_i\| \ge \|q_0\| = \|x_1\|$ ，这与初始条件是矛盾的。

而如果



从图上显然可以看出，这与q_i的选择条件$q_i = \arg\min_{q_i \in Q} \{\langle q_i, x_i \rangle\}$是矛盾的。

因此，x_{i+1}一定落在线段$\overline{x_i q_i}$上。

（2）h_i的变化

$$\begin{aligned} h_i - h_{i+1} &= f_i - \rho - (f_{i+1} - \rho) \\ &= f_i - f_{i+1} \\ &= (1 - \cos\alpha) f_i \\ &\ge \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \, f_i \\ &= \frac{1}{2} \frac{g_i^2}{\|q_i - x_i\|^2} f_i \end{aligned}$$

由于$f_i \ge \rho$，$\|q_i - x_i\|^2 \le D^2$

所以$h_i - h_{i+1} \ge \frac{1}{2} \frac{\rho}{D^2} g_i^2$

方便起见，令$h_i' = \frac{\rho}{2D^2} h_i$，$g_i' = \frac{\rho}{2D^2} g_i \ge h_i'$

$$h_i' - h_{i+1}' \geq \left(g_i'\right)^2 \geq \left(h_i'\right)^2$$
$$\Rightarrow h_i' - h_{i+1}' \geq \left(h_i'\right)^2$$
$$\Rightarrow h_{i+1}' \leq h_i'\left(1-h_i'\right) \leq \frac{h_i'}{1+h_i'}$$
$$\Rightarrow h_{i+1}' \leq \frac{h_i'}{1+h_i'} \qquad (*)$$

考虑初始值：

$$\begin{aligned} h_1'^2 &\leq h_1' - h_2' \\ &= \frac{\rho}{2D^2}\left(f_1 - f_2\right) \\ &= \frac{\rho}{2D^2}\frac{f_1^2 - f_2^2}{f_1 + f_2} \\ &\leq \frac{1}{4D^2}\left(f_1^2 - f_2^2\right) \\ &= \frac{1}{4D^2}\left\|x_1 - x_2\right\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

即 $h_1'^2 \leq \frac{1}{4}$

$\Leftrightarrow h_1' \leq \frac{1}{2}$

结合$(*)$式 $h_{i+1}' \leq \frac{h_i'}{1+h_i'}$

由数学归纳法可得 $h_k' \leq \frac{1}{1+k} \Leftrightarrow h_k \leq \frac{2D^2}{\rho}\cdot\frac{1}{1+k}$

$\Rightarrow f_k \leq \frac{2D^2}{\rho}\cdot\frac{1}{1+k} + \rho$

我们希望 $f_k \leq \left(1+\varepsilon\right)\rho$ 尽量小，就会有迭代次数 $k \geq \Theta\left(\frac{D^2}{\varepsilon\rho^2}\right)$

同时为了得到距离原点 O 最近的点，还希望 ω_k 尽可能大

$h_k' - h_{k+1}' \geq g_k'^2$

$\forall t \geq 1: h_k' - h_{k+t}' \geq \sum_{j=1}^{t} g_{k+j}'^2$

如果一直有 $g_i > \varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{k(1+k)}}$ （当 $i > k$ 时）

$$\Rightarrow h'_k - h'_{k+t} > t \cdot \varepsilon'^2 = t \cdot \frac{1}{k(1+k)} \qquad \text{*有前面结论} h'_k \le \frac{1}{1+k}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+k} > t \cdot \frac{1}{k(1+k)}$$

$$\Rightarrow t < k$$

$$\Rightarrow \text{当} t \ge k \text{时}, \begin{cases} g'_{k+t} \le \varepsilon' = \frac{1}{\sqrt{k(1+k)}} \\ h'_{k+t} \le \frac{1}{1+k+t} < \frac{1}{1+k} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \omega_{k+t} &= f_{k+t} - g_{k+t} \\ &\ge \rho - g_{k+t} \\ &\ge \rho - \frac{2D^2}{\rho} \cdot \frac{1}{\sqrt{k(1+k)}} \quad (\text{当} t \ge k) \end{aligned}$$

如果我们希望边缘的距离无限接近 ρ，即 $\omega_{k+t} = (1-\varepsilon)\rho$，则迭代次数 $k = \Theta\left(\frac{D^2}{\varepsilon\rho^2}\right)$。

*补充：

当原点 O 在点集 Q 里面的时候，我们的目标是 $\left\| O - \widetilde{O} \right\| \to 0$。

如果迭代了 N 次，那么 $\widetilde{O}$ 就是 $\{q_0, q_1, \cdots, q_N\}$ 的一个凸组合。如果 N 比较小，$\widetilde{O}$ 可以看做是 O 的稀疏近似表达。

参考文献：

Bernd Gärtner , Martin Jaggi. *Coresets for Polytope Distance*. 2009